**Wymagania edukacyjne z Matematyki w zakresie podstawowym i rozszerzonym dla klasa III Technikum**

**Podręcznik: Prosto do matury**

**Program nauczania: ZSE-T-MAT-2019- P**

 **ZSE- T- MAT- ROZ -2019-P**

**WIELOMIANY I WYRAŻENIA WYMIERNE**

**Na poziomie wymagań koniecznych lub podstawowych – na ocenę dopuszczającą (2) lub dostateczną (3) uczeń potrafi:**

* zapisywać wielomiany o danych współczynnikach i wypisywać współczynniki danych wielomianów;
* określać stopień wielomianu;
* obliczać wartość wielomianu dla danych argumentów;
* wyznaczać wartości parametrów tak, aby dwa wielomiany były równe;
* dodawać i odejmować wielomiany;
* mnożyć wielomiany, określać stopień iloczynu wielomianów;
* *zapisywać wyrażenia algebraiczne postaci , ,*

 *, w postaci sumy algebraicznej z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia;*

* *zapisywać sumy algebraiczne w postaci , ,*

 *, ;*

* *przekształcać wielomiany z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia trzeciego stopnia;*
* sprawdzać, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu;
* odczytywać pierwiastki wielomianu z jego postaci iloczynowej;
* podawać przykłady wielomianów, mając dane ich pierwiastki;
* rozkładać wielomiany na czynniki z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia;
* rozkładać wielomiany na czynniki metodą grupowania wyrazów;
* rozwiązywać równania wielomianowe za pomocą rozkładu na czynniki;
* stosować równania wielomianowe w zadaniach tekstowych;
* dzielić wielomiany pisemnie;
* zapisywać wielomiany w postaci , mając dane wielomiany i ;
* stosować w zadaniach twierdzenie Bézouta;
* *dzielić wielomian przez dwumian przy użyciu schematu Hornera;*
* rozwiązywać równania wielomianowe z wykorzystaniem twierdzenia o pierwiastkach całkowitych lub *pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych* i twierdzenia Bézouta;
* określać krotność pierwiastka wielomianu;
* *rozwiązywać nierówności wielomianowe metodą siatki znaków;*
* rozwiązywać nierówności wielomianowe metodą przybliżonego wykresu wielomianu;
* rozwiązywać układy nierówności wielomianowych;
* podawać przykłady nierówności wielomianowych, mając dany zbiór ich rozwiązań;
* *wykonywać działania na wielomianach wielu zmiennych;*
* *określać stopień wielomianu wielu zmiennych;*
* *obliczać wartość wielomianu wielu zmiennych dla danych wartości tych zmiennych;*
* określać dziedzinę wyrażenia wymiernego;
* skracać i rozszerzać wyrażenia wymierne;
* sprowadzać wyrażenia wymierne do wspólnego mianownika;
* dodawać i odejmować wyrażenia wymierne;
* mnożyć i dzielić wyrażenia wymierne;
* rozwiązywać równania wymierne prowadzące do równań liniowych lub kwadratowych;
* wyznaczać ze wzoru jedną zmienną w zależności od innych;
* rozwiązywać proste zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych (np. dotyczące drogi, prędkości i czasu);
* *rozwiązywać nierówności wymierne prowadzące do nierówności liniowych lub kwadratowych;*
* *rozwiązywać nierówności wymierne prowadzące do nierówności wielomianowych zapisanych w postaci iloczynu czynników liniowych i kwadratowych;*
* *wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej;*
* *przekształcać wzór funkcji homograficznej do postaci ;*
* *rysować wykres i podawać własności funkcji .*

**Na poziomie wymagań rozszerzających lub dopełniających – na ocenę dobrą (4) lub bardzo dobrą (5) uczeń potrafi:**

* wyznaczać współczynniki wielomianu tak, aby został spełniony podany warunek;
* wyznaczać stopień wielomianu w zależności od wartości parametrów;
* obliczać sumę współczynników wielomianu;
* stosować w zadaniach wzór na kwadrat sumy trzech składników;
* stosować wzory skróconego mnożenia w zadaniach na dowodzenie;
* rozkładać wielomiany na czynniki metodą grupowania wyrazów, jeśli wymaga to przedstawienia pewnych wyrazów w postaci sumy innych;
* *rozkładać wielomiany na czynniki metodą podstawiania;*
* *wyznaczać wartości parametrów, stosując rozkład wielomianu na czynniki;*
* *stosować rozkład wielomianu na czynniki w zadaniach na dowodzenie;*
* *rozkładać na czynniki kwadratowe nierozkładalne wielomiany typu lub ;*
* *rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące dzielenia wielomianów;*
* *rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące pierwiastków wielokrotnych wielomianu;*
* *rozwiązywać równania wielomianowe z parametrem;*
* *rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące nierówności wielomianowych;*
* *rozwiązywać nierówności wielomianowe z parametrem;*
* *wykorzystywać nierówności wielomianowe do wyznaczania dziedziny funkcji;*
* *rozwiązywać zadania na dowodzenie dotyczące nierówności wielomianowych;*
* *rozwiązywać nierówności wielomianowe z wartością bezwzględną;*
* *rozwiązywać nierówności wielomianowe z parametrem;*
* znajdować (w prostych przypadkach) wszystkie pary liczb całkowitych spełniające równanie z dwiema niewiadomymi;
* stosować własności wielomianów wielu zmiennych w zadaniach na dowodzenie;
* wykonywać wieloetapowe działania na wyrażeniach wymiernych;
* *wyznaczać wartości parametrów tak, aby dane wyrażenia wymierne były równe;*
* *rozwiązywać trudniejsze zadania tekstowe prowadzące do równań wymiernych (np. dotyczące wydajności pracy);*
* *rozwiązywać równania wymierne z wartością bezwzględną;*
* *rozwiązywać nierówności wymierne z wartością bezwzględną;*
* *rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z parametrem wymagające rozwiązania* *prostych równań i nierówności wymiernych;*
* *rozwiązywać zadania dotyczące liczby rozwiązań równań wymiernych postaci , gdzie wzór funkcji jest zapisany za pomocą parametru;*
* *rysować wykres funkcji typu i wyznaczać jej zbiór wartości;*
* *rysować wykresy funkcji homograficznych z wartością bezwzględną;*
* *rozwiązywać układy równań wymiernych prowadzące do równań kwadratowych;*
* *rozwiązywać graficznie równania, nierówności lub układy równań, korzystając z wykresów funkcji homograficznych.*

**Na poziomie wymagań wykraczających – na ocenę celującą (6) uczeń potrafi:**

* *udowodnić poprawność schematu Hornera;*
* *udowodnić twierdzenie o pierwiastkach całkowitych lub pierwiastkach wymiernych wielomianu o współczynnikach całkowitych;*
* *wyznaczać resztę z dzielenia wielomianu przez iloczyn wielomianów, znając reszty z dzielenia tego wielomianu przez poszczególne czynniki;*
* *rozwiązywać równania i nierówności wymierne z parametrem;*
* *rozwiązywać zadania o znacznym stopniu trudności dotyczące wielomianów i funkcji wymiernych.*

**PLANIMETRIA**

**Na poziomie wymagań koniecznych lub podstawowych – na ocenę dopuszczającą (2) lub dostateczną (3) uczeń potrafi:**

* wykorzystywać w zadaniach nierówność trójkąta;
* wykorzystywać w zadaniach twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa;
* wykorzystywać w zadaniach własność symetralnej odcinka i własność dwusiecznej kąta;
* wykonywać elementarne konstrukcje geometryczne, np. symetralnej odcinka, dwusiecznej kąta, prostej równoległej (prostopadłej) do danej przechodzącej przez dany punkt;
* określać wzajemne położenie dwóch okręgów;
* korzystać z własności okręgów stycznych;
* korzystać z własności stycznej do okręgu;
* określać wzajemne położenie okręgu i prostej;
* korzystać z twierdzenia o odcinkach stycznych;
* korzystać z własności okręgu wpisanego w trójkąt i okręgu opisanego na trójkącie;
* stosować w zadaniach pojęcia kąta środkowego i kąta wpisanego;
* stosować w zadaniach twierdzenie o zależności między kątem środkowym a kątem wpisanym opartymi na tym samym łuku;
* stosować w zadaniach twierdzenie o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku;
* stosować w zadaniach twierdzenie o kącie wpisanym opartym na średnicy;
* obliczać pola wycinków kołowych i pierścieni kołowych;
* rozstrzygać, czy na danym czworokącie można opisać okrąg;
* stosować w prostych zadaniach twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg;
* rozstrzygać, czy w dany czworokąt można wpisać okrąg;
* stosować w prostych zadaniach twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu;
* stosować twierdzenie Talesa do obliczania długości odcinków;
* stosować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa do ustalania równoległości prostych;
* rozpoznawać figury podobne;
* obliczać długości boków figur podobnych, wykorzystując skalę podobieństwa;
* stosować w zadaniach twierdzenie o stosunku pól figur podobnych;
* rozpoznawać trójkąty podobne;
* stosować w zadaniach cechy podobieństwa trójkątów;
* poprawnie zapisywać proporcje boków w trójkątach podobnych;
* stosować w zadaniach twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta;
* stosować w zadaniach własności środkowych trójkąta;
* stosować w zadaniach wzory na promień okręgu opisanego na trójkącie równobocznym i promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny.

**Na poziomie wymagań rozszerzających lub dopełniających – na ocenę dobrą (4) lub bardzo dobrą (5) uczeń potrafi:**

* podawać liczbę osi symetrii i środków symetrii figur geometrycznych;
* korzystać z własności stycznych do okręgu i własności okręgów stycznych w wieloetapowych zadaniach geometrycznych;
* stosować w zadaniach twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą;
* stosować w zadaniach pojęcie kąta, pod którym widać dany odcinek z danego punktu;
* stosować zależność między kątem środkowym i kątem wpisanym w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności, np. w zadaniach wymagających dorysowania dodatkowych cięciw albo dostrzeżenia kąta prostego opartego na średnicy;
* stosować w trudniejszych zadaniach (np. w zadaniach na dowodzenie lub zadaniach konstrukcyjnych) twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg;
* stosować w trudniejszych zadaniach (np. w zadaniach na dowodzenie lub zadaniach konstrukcyjnych) twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu;
* *stosować twierdzenie Talesa w zadaniach konstrukcyjnych;*
* *rozwiązywać zadania wymagające wielokrotnego zastosowania twierdzenia Talesa;*
* *rozwiązywać zadania wymagające zastosowania twierdzenie Talesa osadzone w kontekście praktycznym;*
* *wykorzystywać podobieństwo figur do obliczania odległości punktów i pól obszarów na mapie o danej skali lub w terenie;*
* *stosować w zadaniach twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego;*
* *stosować podobieństwo trójkątów w zadaniach wieloetapowych, np. wymagających poprowadzenia dodatkowych odcinków i dostrzeżenia trójkątów podobnych;*
* *rozwiązywać zadania łączące podobieństwo trójkątów i kąty związane z okręgiem;*
* *korzystać z podobieństwa trójkątów w zadaniach na dowodzenie.*

**Na poziomie wymagań wykraczających – na ocenę celującą (6) uczeń potrafi:**

*udowodnić twierdzenie o kącie środkowym i kącie wpisanym opartych na tym samym łuku;*

*udowodnić twierdzenie o równości kątów wpisanych opartych na tym samym łuku;*

*udowodnić twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg;*

*udowodnić twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu;*

*udowodnić twierdzenie Talesa;*

*udowodnić twierdzenia o punktach szczególnych w trójkącie: punkcie przecięcia symetralnych boków, wysokości, dwusiecznych kątów wewnętrznych oraz o środkowych;*

*udowodnić twierdzenie o wysokości trójkąta prostokątnego poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego;*

*rozwiązywać trudniejsze zadania konstrukcyjne (np. skonstruować styczną do okręgu z punktu leżącego poza tym okręgiem lub skonstruować odcinek o długości będącej* *średnią geometryczną dwóch danych odcinków) i udowadniać poprawność takich konstrukcji;*

*udowodnić twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta;*

*rozwiązywać zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące punktów szczególnych w trójkącie, podobieństwa figur, okręgów i prostych, kątów w kole oraz wielokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.*

**FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE**

**Na poziomie wymagań koniecznych lub podstawowych – na ocenę dopuszczającą (2) lub dostateczną (3) uczeń potrafi:**

* wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) w trójkącie prostokątnym o danych bokach;
* obliczać długości boków i miary kątów trójkąta prostokątnego, mając dane jeden bok i wartość funkcji trygonometrycznej jednego z kątów ostrych;
* konstruować kąt ostry, mając daną wartość jednej z jego funkcji trygonometrycznych;
* posługiwać się wartościami funkcji trygonometrycznych (sinus, cosinus, tangens) kątów 30º, 45º, 60º;
* korzystać z przybliżonych wartości funkcji trygonometrycznych (odczytanych z tablic lub obliczonych za pomocą kalkulatora);
* znajdować miarę kąta, dla którego funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość (miarę dokładną albo – w razie korzystania z tablic lub kalkulatora – miarę przybliżoną);
* obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, jaki tworzy prosta z osią ;
* stosować podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego: , , , w prostych przypadkach;
* znając wartość funkcji trygonometrycznej: sinus, cosinus lub tangens kąta ostrego, wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta;
* wykorzystywać funkcje trygonometryczne do obliczania pól i obwodów trójkątów;
* stosować w zadaniach wzór , gdzie jest kątem ostrym;
* wykorzystywać funkcje trygonometryczne w łatwych zadaniach geometrycznych dotyczących czworokątów, np. trapezu prostokątnego;
* prawidłowo umieszczać kąty wypukłe w układzie współrzędnych;
* obliczać wartości funkcji trygonometrycznych kątów wypukłych umieszczonych w układzie współrzędnych;
* stosować wzory redukcyjne dotyczące kąta do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych;
* korzystać ze wzoru w przypadku kąta rozwartego;
* stosować w zadaniach podstawowe związki między funkcjami trygonometrycznymi kąta rozwartego: , ;
* znając wartość funkcji trygonometrycznej: sinus, cosinus lub tangens kąta rozwartego, wyznaczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych tego kąta;
* udowadniać proste tożsamości trygonometryczne i podawać dotyczące ich założenia.

**Na poziomie wymagań rozszerzających lub dopełniających – na ocenę dobrą (4) lub bardzo dobrą (5) uczeń potrafi:**

* wyznaczać wartości funkcji trygonometrycznych lub wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne w bardziej złożonych sytuacjach;
* wyznaczać kąt ostry z równości dotyczącej jednej z jego funkcji trygonometrycznych;
* stosować związki między funkcjami trygonometrycznymi w bardziej złożonych sytuacjach;
* sprawdzać, czy istnieje kąt ostry spełniający podany warunek;
* *korzystać ze związków między funkcjami trygonometrycznymi w zadaniach na dowodzenie;*
* *korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w trudniejszych obliczeniach geometrycznych, np. w zadaniach o okręgach albo zadaniach prowadzących do układów równań;*
* *korzystać z własności funkcji trygonometrycznych w zadaniach osadzonych w kontekście praktycznym;*
* *konstruować kąt w układzie współrzędnych, znając wartość jednej z jego funkcji trygonometrycznych;*
* *stosować definicje funkcji trygonometrycznych kąta rozwartego w zadaniach na dowodzenie;*
* *udowadniać tożsamości trygonometryczne wymagające przekształcenia wyrażeń wymiernych i podawać dotyczące ich założenia;*
* rozwiązywać zadania wymagające zastosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi, np. znając wartość , obliczyć .

**Na poziomie wymagań wykraczających – na ocenę celującą (6) uczeń potrafi:**

* *udowodnić wzory redukcyjne dla kątów rozwartych;*
* *wyprowadzić wzór ;*
* *wyprowadzić wzory na dokładne wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów, np. , , .*

**FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE**

**Na poziomie wymagań koniecznych lub podstawowych – na ocenę dopuszczającą (2) lub dostateczną (3) uczeń potrafi:**

* sporządzać wykresy i podawać własności funkcji wykładniczych;
* *przekształcać wykresy funkcji wykładniczych;*
* *wyznaczać wartość parametru tak, aby dany punkt należał do wykresu funkcji wykładniczej;*
* *obliczać wartości współczynników we wzorze funkcji wykładniczej na podstawie jej wykresu;*
* *rozwiązywać graficznie równanie lub nierówność, korzystając z wykresu funkcji wykładniczej;*
* *rozwiązywać graficznie układ dwóch równań lub nierówności, z których co najmniej jedno jest równaniem wykładniczym;*
* stosować w zadaniach wzory na logarytmy iloczynu i ilorazu;
* stosować w zadaniach wzór na logarytm potęgi;
* *stosować w zadaniach wzór na zamianę podstawy logarytmu;*
* sporządzać wykresy i podawać własności funkcji logarytmicznych;
* *przekształcać wykresy funkcji logarytmicznych;*
* *obliczać wartości współczynników we wzorze funkcji logarytmicznej na podstawie jej wykresu;*
* *odczytywać z wykresów funkcji i rozwiązanie nierówności , korzystając z wykresu funkcji logarytmicznej;*
* rozwiązywać proste równania wykładnicze typu ;
* rozwiązywać proste nierówności wykładnicze typu ;
* rozwiązywać proste równania logarytmiczne typu ;
* rozwiązywać proste nierówności logarytmiczne typu .

**Na poziomie wymagań rozszerzających lub dopełniających – na ocenę dobrą (4) lub bardzo dobrą (5) uczeń potrafi:**

* *sporządzać wykresy funkcji wykładniczych z wartością bezwzględną;*
* *rozwiązywać zadania osadzone w kontekście praktycznym z zastosowaniem funkcji wykładniczej;*
* *wykorzystywać własności logarytmów w zadaniach na dowodzenie;*
* *wykorzystywać własności logarytmów w zadaniach o podwyższonym stopniu trudności;*
* *sporządzać wykresy funkcji logarytmicznych z wartością bezwzględną;*
* *sporządzać wykresy funkcji logarytmicznych (i wykładniczych) zapisanych różnymi wzorami w różnych przedziałach;*
* *wyznaczać dziedzinę funkcji typu ;*
* *rozwiązywać z zastosowaniem logarytmów zadania osadzone w kontekście praktycznym;*
* *rozwiązywać zadania z parametrem dotyczące określania dziedziny złożonej funkcji logarytmicznej;*
* *rozwiązywać równania wykładnicze metodą podstawiania;*
* *rozwiązywać proste równania logarytmiczne metodą podstawiania.*

**Na poziomie wymagań wykraczających – na ocenę celującą (6) uczeń potrafi:**

* *udowodnić wzory na: logarytm iloczynu, logarytm ilorazu, logarytm potęgi i zamianę podstawy logarytmu;*
* *rozwiązywać równania wykładnicze (logarytmiczne) z parametrem;*
* *rozwiązywać zadania o znacznym stopniu trudności, wykorzystując własności logarytmów oraz własności funkcji wykładniczej i funkcji logarytmicznej.*

Treści z zakresu rozszerzonego zostały zaznaczone pochyloną trzcinką